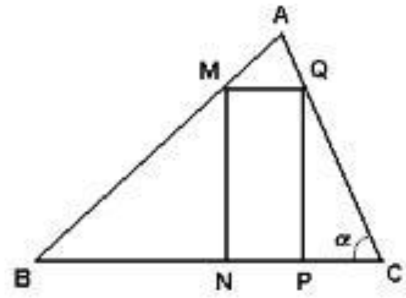
No triângulo ABC, AC = 5cm, BC = 20cm e cos α =3/5. O maior valor possível, em cm, para a área do retângulo MNPQ, construído conforme mostra a figura a seguir, é:



a) 16

b) 18

c) 20

d) 22

O exercício será dividido em quatro partes: aplicar semelhança de triângulos, trigonometria, teorema de Pitágoras e valor máximo de uma função. O objetivo geral é achar a equação que irá descrever a área do retângulo MNPQ e, para isto, precisamos achar o valor de PQ.

1ª parte: Vamos chamar MQ de x. Como MQ // BC, então os triângulos AMQ e ABC são semelhantes, vamos usar a semelhança para achar o valor de AQ e QC:

$$\frac{20}{5} = \frac{x}{AQ} \rightarrow 4 = \frac{x}{AQ} \rightarrow 4.AQ = x \rightarrow \boldsymbol{AQ = \frac{x}{4}}$$

$$QC = AC - AQ \rightarrow QC = 5 - \frac{x}{4} \rightarrow \boldsymbol{QC = \frac{20 - x}{4}}$$

2ª parte: Como o triângulo QPC é um retângulo, vamos usar que cos α = 3/5 nesse triângulo:

$$\cos\alpha = \frac{PC}{QC} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{PC}{\frac{20 - x}{4}} \rightarrow 5PC = \frac{3}{4}(20 - x) \rightarrow \boldsymbol{PC = \frac{3}{20}(20 - x)}$$

3ª parte: Achando o valor de PQ, usando o teorema de Pitágoras:

$$QC^2 = PQ^2 + PC^2 \rightarrow PQ^2 = QC^2 - PC^2 \rightarrow PQ^2 = \frac{(20 - x)^2}{16} - \frac{9(20 - x)^2}{400} \rightarrow PQ^2 = (20 - x)^2\left(\frac{1}{16} - \frac{9}{400}\right) \rightarrow PQ^2 = \frac{(20 - x)^2(25 - 9)}{400} \rightarrow PQ^2 = \frac{16}{400}(20 - x)^2 \rightarrow PQ = \frac{4}{20}(20 - x) \rightarrow \boldsymbol{PQ = \frac{20 - x}{5}}$$

4ª parte: A área do retângulo é MQ.PQ:

$$A_{ret} = MQ.PQ = x.\left(\frac{20 - x}{5}\right) = \boldsymbol{4x - \frac{x^2}{5}}$$

O máximo valor da área é o $y_{máx} = -\frac{\Delta}{4a}$*:*

$$y_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4.\left(-\frac{1}{5}\right).0}{4.\left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{16}{-\frac{4}{5}} \rightarrow \ y_{máx} = \frac{16}{\frac{4}{5}} \rightarrow \ y_{máx} = 16.\left(\frac{5}{4}\right) \rightarrow \ \boxed{\boldsymbol{y_{máx} = 20}}$$

Então a resposta é ***Letra C****.*