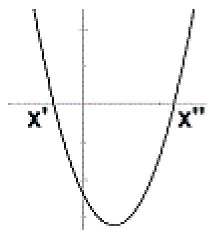
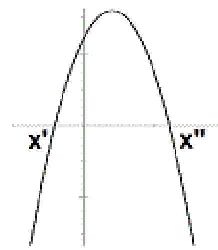
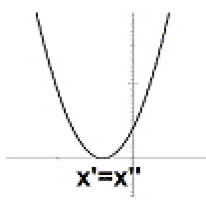
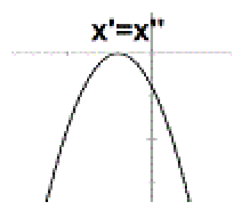
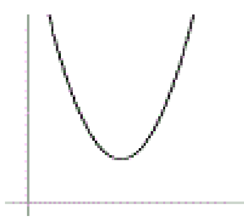
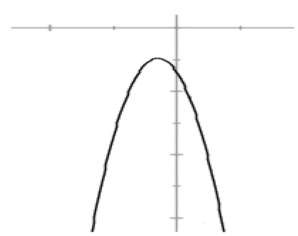
Se $ax^2 + ax + 1 + \frac{3}{a} < 0$ para todo x real, o único valor inteiro de a é:

a) -6
b) -3
c) -2
d) -1

Antes de fazer o exercício, vamos relembrar o estudo de uma função de 2º grau:

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

<table>
<tr>
<td>Se $a > 0$ e $\Delta > 0$ $\rightarrow$ Ela terá duas raízes reais e distintas e concavidade para cima:

</td>
<td>Se $a > 0$ e $\Delta > 0$ $\rightarrow$ Ela terá duas raízes reais e distintas e concavidade para baixo:

</td>
</tr>
<tr>
<td>Se $a > 0$ e $\Delta = 0$ $\rightarrow$ Ela terá duas raízes reais iguais e concavidade para cima:

</td>
<td>Se $a > 0$ e $\Delta = 0$ $\rightarrow$ Ela terá duas raízes reais iguais e concavidade para baixo:

</td>
</tr>
<tr>
<td>Se $a > 0$ e $\Delta < 0$ $\rightarrow$ Ela não terá raízes reais e sua concavidade será para cima:
</td>
<td>Se $a < 0$ e $\Delta < 0$ $\rightarrow$ Ela não terá raízes reais e sua concavidade será para baixo:
</td>
</tr>
</table>

Sabendo disto, podemos começar o exercício:

Para que a função seja sempre negativa para qualquer x real, ela não deve assumir nenhum valor igual a zero, ou seja, ela não pode ter raízes reais. Logo, ela tem que ter as seguintes características:

- *O coeficiente de x² deve ser menor que zero:* $\boldsymbol{a} < 0$;
- $\Delta < 0, ou\ seja$:

$$a^2 - 4.a.\left(1 + \frac{3}{a}\right) < 0 \;\rightarrow\; a^2 - 4a - \frac{3.4a}{a} < 0 \;\rightarrow\; a^2 - 4a - 12 < 0$$

Vamos ter que estudar essa inequação: $\Delta = a^2 - 4a - 12 < 0$

- Raízes da inequação:

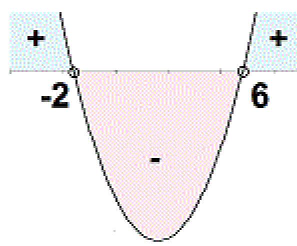
$$\Delta_a = (-4)^2 - 4.1.(-12) = 16 + 48 \;\rightarrow\; \Delta_a = 64$$

$$a' = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2.1} = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} \;\rightarrow\; \boxed{a' = 6}$$

$$a'' = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2.1} = \frac{4-8}{2} = -\frac{4}{2} \;\rightarrow\; \boxed{a'' = -2}$$

- Estudo de sinal:

Como o coeficiente de a² é 1, logo é positivo, o gráfico da função terá concavidade para cima, como está mostrado ao lado. A função Δ será positiva para todo a < -2 e a > 6 e será negativa para todo a entre -2 e 6.



- *Então Δ será negativo se -2 < a < 6. Porém, a < 0, então, a só poderá estar entre -2 e 0. Como o único inteiro que existe nesse intervalo é -1, então* ***a = -1****.*

Resposta: ***Letra D****.*