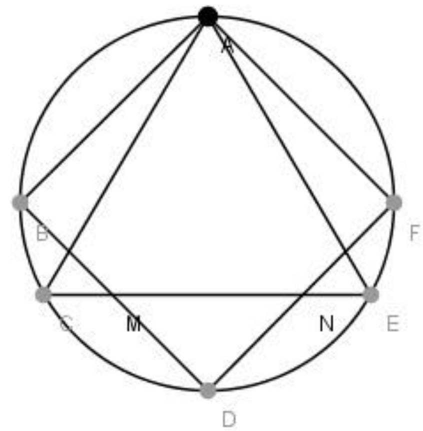
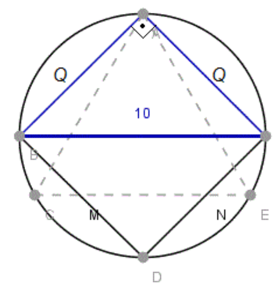
Na figura, temos um triângulo eqüilátero e um quadrado com um vértice em comum A, inscritos numa mesma circunferência de raio igual a 5 cm. Calcule a medida de MN, sendo M e N pontos de interseção dos lados do triângulo e do quadrado.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8



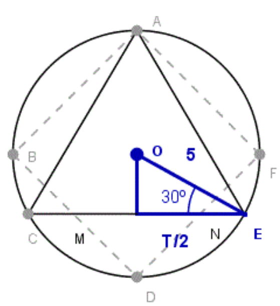
O cálculo de MN, que vai ser chamado de x, será feito através do cálculo de áreas. Porém, primeiramente, vamos encontrar o valor dos lados do quadrado ABDF e do triângulo ACE.

- *A diagonal do quadrado é o diâmetro da circunferência: d = 10. Chamando de Q o lado do quadrado ABDF, teremos:*



$$Q^2 + Q^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad 2Q^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad Q^2 = \frac{100}{2} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

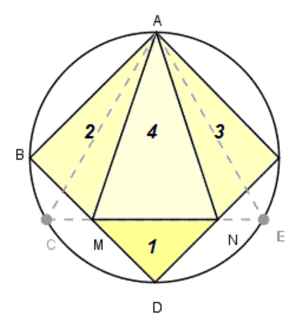
$$\Rightarrow \boxed{Q = 5\sqrt{2}}$$



- *Chamando de T o lado do triângulo ACE, vamos usar a trigonometria para encontrar T. Sendo O, o centro da circunferência, OE é raio* $\rightarrow OE = 5cm$.

$$cos\ 30° = \frac{\frac{T}{2}}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{T}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{T}{5} \rightarrow \boxed{T = 5\sqrt{3}}$$

- *Agora, vamos calcular a área de quatro regiões do quadrado ABDF, cuja área total é* $A_t = 5\sqrt{2}.5\sqrt{2} = \mathbf{50\ cm^2}$.
  - *<u>Área 1:</u> Como o triângulo MDN é retângulo, precisamos encontrar o valor de MD (que é igual a ND) para calcularmos sua área. (Lembrando que estamos considerando MN = x)*



$$MN^2 = MD^2 + ND^2 \rightarrow \quad x^2 = MD^2 + MD^2 \quad \rightarrow \quad 2MD^2 = x^2$$

$$\rightarrow \boxed{MD^2 = \frac{x^2}{2}} \rightarrow \quad MD = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \boxed{MD = \frac{\sqrt{2}x}{2}}$$

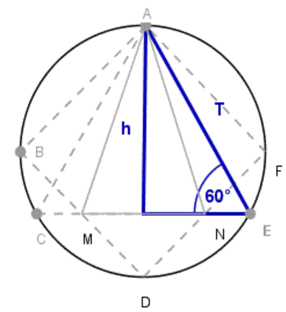
A área 1 será:

$$A_1 = \frac{MD \cdot ND}{2} = \frac{MD \cdot MD}{2} = \frac{MD^2}{2} = \frac{\frac{x^2}{2}}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{A_1 = \frac{x^2}{4}}$$

- *Área 2 e 3: Essas áreas são iguais, já que os triângulos são congruentes.*

$$A_2 = A_3 = \frac{BM.AB}{2} = \frac{(BD-MD).AB}{2} = \frac{(Q-MD).Q}{2} = \frac{\left(5\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)5\sqrt{2}}{2} = \frac{50-5x}{2} \rightarrow \boxed{A_2 = \frac{5}{2}.(10-x)}$$

- *Área 4: Antes de calcularmos a área do triângulos AMN, precisamos encontrar a sua altura h, que é a mesma altura do triângulo ACE. Para isso usaremos trigonometria.*



$$sen\ 60° = \frac{h}{AE} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{T} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{5\sqrt{3}} \rightarrow h = \frac{5.3}{2} \rightarrow \boxed{h = \frac{15}{2}}$$

A área do triângulo AMN será:

$$A_4 = \frac{MN.h}{2} = x.\frac{\left(\frac{15}{2}\right)}{2} \rightarrow \boxed{A_4 = \frac{15x}{4}}$$

- *Para encontrarmos o valor de MN basta somar as quatro áreas e igualar a área do quadrado:*

$$A_t = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_1 + 2.A_2 + A_4 \rightarrow 50 = \frac{x^2}{4} + \frac{\cancel{2}.5}{\cancel{2}}.(10-x) + \frac{15x}{4} \rightarrow$$

$$50 = \frac{x^2 + 20(10-x) + 15x}{4} \rightarrow \cancel{200} = x^2 + \cancel{200} - 20x + 15x \rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\rightarrow x(x-5) = 0 \rightarrow \cancel{x = 0}\ ou\ x - 5 = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 5}}$$

Letra A.